UNIVERSIDAD TÉCNICA DE ORURO
FACULTAD NACIONAL DE INGENIERIA
INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN EN SISTEMAS ELÉCTRICOS

Curso de Actualización

MCs. Ing. Armengol Blanco Benito

Reimpresión

Oruro, octubre 2003

PREFACIO

El presente texto del curso de actualización sobre Aplicación de Técnicas de Optimización en Sistemas Eléctricos, tiene el objetivo de profundizar el estudio de la operación económica de los Sistemas Eléctricos de Potencia.

Para analizar la operación óptima de sistemas eléctricos de potencia, se requiere del auxilio de varias técnicas: modelación, análisis, optimización, diseño y simulación, las cuales se estudian en los cursos superiores de Ingeniería Eléctrica. En este curso breve, se hará énfasis en la modelación del problema de Optimización y sus métodos de solución.

Para que la operación del sistema tenga el costo mínimo, se requiere utilizar principalmente los métodos de Optimización -denominados también, métodos de investigación operativa-.

En una primera parte, se analiza la operación de los sistemas eléctricos de potencia. En la segunda parte, se trata el problema de la optimización y sus métodos de solución. Y finalmente, en la última parte se aborda el problema de la operación económica de los sistemas eléctricos de potencia.

En el texto se hace énfasis en el aspecto académico de los problemas enfocados con el fin de facilitar la comprensión de los mismos.

A lo largo del texto, una vez hecha la modelación y representación matemática del problema, se realiza la aplicación de tres programas de optimización para la resolución de problemas de optimización: LINDO, EUREKA y SOLVER de Excel.

Noviembre 1997

Armengol Blanco Benito

Índice General

	Pág.
Prefacio	i
Índice General	ii

I OPERACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

1.1 Introducción	1
1.2 Modelación del Sistema Eléctrico	1
1.2.1 Modelo de Optimización	2
1.2.2 Variables de Control	2
1.2.3 Variables de Estado	2
1.2.4 Parámetros de la Red	3
1.2.5 Perturbaciones de la Red	3
1.3 Flujo Óptimo de Potencia	3
1.3.1 Optimización del SEP	3
1.3.2 Modelo de Optimización del SEP	3
1.3.3 Objetivos Operacionales	4
1.3.4 Variables de Control	5
1.3.5 Restricciones de Operación	6
1.4 Formulación de los Modelos de Optimización	6
1.4.1 Dimensionamiento y Ubicación Óptima de Bancos de Capacitores	7
1.4.1.1 Aplicación de la Programación Lineal	7
1.4.2 Operación Económica del SEP	8
1.4.3 Minimización de Pérdidas de Potencia Activa	8

II MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

2.1 Introducción	10
2.2 Programación Lineal	10
2.2.1 Método Simplex	11
2.2.2 Método Simplex revisado	12
2.2.3 El problema dual	12
2.2.4 Interpretación de las Variables Duales	13
2.3 Software LINDO	13
2.3.1 Aplicaciones	13
2.4 Programación No-Lineal	26
2.4.1 Técnica de los Multiplicadores de Lagrange	26
2.4.2 Técnica de los Multiplicadores de Kuhn-Tucker	27
2.5 Software EUREKA	28
2.5.1 Aplicaciones	28

III OPERACIÓN ECONÓMICA DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

3.1 Introducción 31
3.2 Modelación de Centrales 31
3.3 Modelo del Despacho de Carga Económico 33
3.4 Métodos de Solución 34
3.4.1 Método Iterativo Lambda 34
3.5 Costos Marginales (Costos Incrementales) 35
3.6 Pérdidas de Transmisión 36
3.7 Factores de Penalización 37
3.8 Aplicaciones 38

Referencias Bibliográficas 41

Anexos

A.1 Ayuda y Comandos de LINDO 42
A.2 Aplicación de la Rutina SOLVER de EXCEL 44
A.3 Flujograma Del Método Iterativo Lambda 46

I OPERACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

1.1 Introducción

La operación de los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP), conlleva la aplicación e implementación de varias técnicas, tales como: modelación, análisis, optimización, diseño y simulación que ayudarán al operador del sistema a tomar una decisión adecuada.

En la operación de sistemas interconectados, se efectúa el control y despacho económico de potencia, de tal modo que los costos de operación sean mínimos. Estos aspectos de la operación del sistema tropiezan con varios problemas, los cuales necesitan ser resueltos.

Hoy en día, la operación de los sistemas eléctricos, se basa en los costos marginales: a corto, mediano y largo plazo, es decir, los costos por día, semanas y años, respectivamente.

Con la desregulación del mercado eléctrico en el mundo, muchos investigadores, están trabajando aún para dar soluciones al problema del **flujo de carga óptimo** (FOP) que promete extender el despacho económico para incluir al escenario [1]: un perfil óptimo de tensiones de generación, cambiador de taps del transformador y fuentes de potencia reactiva. A la lista, se pueden añadir nuevos problemas que surgirán, los que se resolverán con nuevas metodologías de solución y nuevas tecnologías.

1.2 Modelación del Sistema Eléctrico [2]

En la modelación de la operación del SEP en estado permanente, el sistema se representa mediante un conjunto de variables de estado *x* y de control *u*, parámetros *p* y perturbaciones *b*. Las leyes físicas –leyes de Kirchhoff-, relacionan dichas variables y parámetros.

Considerando al SEP como un sistema de control, este queda representado por las siguientes ecuación e inecuación:

$$g(u, x, p, b) = 0$$
$$h(u, x, p, b) \leq 0$$

donde:

- g() Ecuaciones del flujo de potencia
- h() Inecuaciones que representan la factibilidad y las condiciones de seguridad
- u Vector de variables de control
- x Vector de variables de estado
- p Parámetros de la red

b Perturbaciones

Para la resolución de este modelo se emplean diversos métodos, siendo el más popular el método Newton-Raphson Desacoplado Rápido (NRDR).

En la operación normal no se modifica los parámetros p de la red y la probabilidad de ocurrencia de una perturbación es muy baja. Considerando un modelo determinístico, el sistema eléctrico de potencia, puede ser representado sin perder generalidad, por:

$$g(u, x) = 0$$
$$h(u, x) \leq 0$$

1.2.1 Modelo de Optimización

El planteamiento general del problema de optimización del SEP, conduce a un modelo general, el cual puede ser resuelto por los algoritmos utilizados por las técnicas de optimización.

La formulación del problema general puede ser expresada como:

Minimizar $f(u,x)$ (1)
sujeto a:
$g(u,x) = 0$ (2)
$h(u,x) \leq 0$ (3)
$u^m \leq u \leq u^M$ (4)

donde:

u Variable de Control
x Variable de Estado
(1) Función Objetivo
(2) Restricciones de Red
(3) Restricciones de Operación
(4) Límites de la Variable de Control

1.2.2 Variables de Control, u

Para un tiempo dado, son conocidas la potencia activa y reactiva de la carga y generación. Para unidades térmicas, la función costo de combustible, es conocida. Para las plantas hidráulicas, la optimización diaria entrega los valores de la potencia y también la función de costos equivalente de la planta hidráulica que se maneja como una planta térmica ficticia. En esas condiciones, las variables sobre las cuales, el operador del centro de control puede manipular, usualmente son [2]:

i) La potencia activa **P** generada por las unidades térmicas o equivalentes.

ii) Las magnitudes de las tensiones **Vg,** de generación y de condensadores síncronos.
iii) La relación de transformación taps, **t** y cambiadores de fase, α.
iv) Otras fuentes de potencia reactiva **Q**, banco de capacitores y reactores.
v) Los enlaces de flujo **d** de Corriente Continua.
vi) En condiciones especiales: La potencia programada de las centrales hidráulicas, potencia de emergencia y desprendimiento de carga.

1.2.3 Variables de Estado, x

Las variables de estado, son las otras variables que son necesarias para definir el estado del sistema.

i) Los ángulos de fase δ de las tensiones en cada barra,
ii) Las magnitudes de tensión **V** en las barras de carga **PQ**,
iii) La frecuencia **f** del sistema y
iv) La potencia reactiva **Q** en las barras **PV.**

1.2.4 Parámetros de la Red, p

Son los estados de ligazón de los distintos nodos del SEP:

i) Las impedancias de las líneas, transformadores y cables,
ii) La susceptancia capacitiva de las líneas y cables,
iii) La topología de la red y
iv) La carga modelada como impedancia constante.

1.2.5 Perturbaciones de la Red, b

Las perturbaciones de la red, están dadas principalmente por la variación de la carga. Si se considera un modelo determinístico, la carga es constante en un cierto período.

Al considerar un modelo probabilístico, se deberá considerar la aleatoriedad de la carga.

En la modelación del SEP para el análisis económico, no se considera los problemas de estabilidad -permanente o transitoria-, se supone que el sistema es estable y que los niveles de tensión satisfacen los requerimientos de operación y están dentro de los valores normales. En otras palabras, se supone que el sistema está en operación normal, es decir, no se consideran contingencias probables que llevarían al sistema a un estado de emergencia u otro [2].

1.3 Flujo Óptimo de Potencia

La operación del SEP, tiene asociado, los costos de operación que dependen de los costos de generación y transacción de energía y potencia.

Los costos de operación comprenden: costos fijos y variables. Los costos fijos son independientes de la potencia generada o transmitida. Mientras que, los costos variables dependen del nivel de carga del sistema que tiene un comportamiento estocástico, por lo que la operación económica se enfoca a minimizar los costos de operación ya sea a corto, mediano o largo plazo.

1.3.1 Optimización del Sistema de Potencia

Dada la complejidad de los sistemas eléctricos de potencia, donde existen centrales de generación -tanto térmicas como hidráulicas-, sistemas de transporte –compuesto por líneas de transmisión y subestaciones de transformación, sistemas eléctricos de distribución, y una demanda de energía eléctrica, es necesario utilizar técnicas y métodos para optimizar la operación del sistema.

1.3.2 Modelo de Optimización de SEP

Dependiendo del grado de complejidad en la representación del sistema de generación: térmico o hidrotérmico y el sistema de transmisión, existen dos modelos básicos, que son empleados por las distintas empresas eléctricas en el mundo. Estos modelos, son:

a) Modelo de Barra Única

En la modelación, se considera que los generadores están conectados a una barra única, no se considera las pérdidas del sistema de transmisión. Sus características principales, son:

- Costo marginal único
- Independiente entre períodos de estudio
- Modelo simple

b) Modelo de Red

En la modelación, se considera las pérdidas del sistema de transmisión. Sus características principales, son:

- Costo marginal por barra
- Se requiere resolver las ecuaciones de flujo de potencia
- Ecuaciones de pérdidas eléctricas

- Dependencia entre períodos de estudio para sistema hidrotérmicos (dinámico).
- Alta complejidad, gran dimensionalidad

Existen otras alternativas en la modelación de sistema eléctrico, que son combinaciones de los modelos básicos.

En general, la formulación del flujo óptimo de potencia como un problema de optimización con restricciones queda expresado por:

Minimizar f(u,x)
sujeto a:
$g(u,x) = 0$
$h(u,x) \leq 0$
donde:
u Variables de Control
x Variables de Estado
f() Función Objetivo
g() Restricciones de Red
h() Restricciones de Operación

1.3.3 Objetivos Operacionales

Los objetivos operacionales, son los problemas a enfrenar en la operación del SEP.

Los principales objetivos operacionales que se consideran en los sistemas eléctricos, son los siguientes [3]:

1) Costo de operación mínimo

- El objetivo comprende la suma de costos de generación y transacción de potencia.

$$\sum F_i = a_{0i} + a_{1i}P_i + a_{2i}P_i^2$$

donde:

F_i Función costo de generación de la unidad i
P_i Potencia generada por la unidad i
a_{ki} Coeficientes

2) Pérdidas de transmisión mínima.

- Minimizar las pérdidas óhmicas del sistema.

$$\sum R_{ij} I_{ij}^2$$

donde:

R_{ij} Resistencia de la línea conectada entre el nodo i y j

I_{ij} Intensidad de corriente que transporta la línea conectada entre el nodo i y j

3) Desviación mínima del punto de operación.

- Se define como la suma de los cuadrados ponderados de las desviaciones de las variables de control.

$$\sum (V_O - V_i)^2$$

donde:

V_i Tensión en el nodo i

4) Mínimo número de variables de control re-despachados.

- En la práctica son pocas las variables que pueden ser controladas.

1.3.4 Variables de Control [3]

Las variables de control, son las variables manipuladas, es decir, representan las acciones que puede ejecutar un operador del SEP.

En la operación y control de un SEP, las variables de control se pueden agrupar de acuerdo a los problemas tratados, las cuales, son:

1) Sub-problema de Potencia Activa

- Los MWs generados
- Taps del cambiador de fase
- Intercambio de MWs
- Transferencia de MWs en los enlaces HVDC

2) Sub-problema de Potencia Reactiva

- Tensión de generación
- Cambiadores de Taps de transformadores
- Banco de capacitores y reactores

3) Sub-problema de Potencia Activa y Reactiva

- Transformadores con variación de Taps complejo

- Partida o parada de generadores.
- Reducción y/o desprendimiento de carga
- Conmutación de Líneas

1.3.5 Restricciones de Operación [3]

Las restricciones de operación, se refieren a las limitaciones físicas de los diferentes equipos del SEP, entonces, se tendrían diferentes restricciones, las cuales, son:

1) Sub-problema de potencia activa

- Flujos de MWs en las ramas
- Los MWs de reserva rodante
- Intercambio de MWs entre áreas
- Ángulos de tensión en barras

2) Sub-problema de Potencia Reactiva

- Tensión en barras
- Flujos de MVARs en las ramas
- Los MVARs de reserva rodante
- Intercambio de MVARs entre áreas.

3) Sub-problema de Potencia Activa y Reactiva.

- Flujos de MVAs y Corrientes en las ramas,

1.4 Formulación de Modelos de Optimización

De las diversas funciones objetivos que se pueden deducir de los problemas reales, se tendría principalmente, los siguientes:

- Dimensionamiento y Ubicación Óptima de Banco de Capacitores
- Operación Económica del SEP
- Minimización de Pérdidas de Potencia Activa

1.4.1 Dimensionamiento y Ubicación Óptima de Banco de Capacitores

En la planificación y diseño de redes de transmisión, algunas veces es necesario la instalación de bancos de capacitores controlables en algunas barras, para mantener la tensión durante las condiciones de emergencia. Considerando la seguridad del SEP, uno de los mayores problemas son los MVARs necesarios y su ubicación en el sistema, para evitar los colapsos de tensión en el sistema.

En algunas redes de transmisión, se utilizan condensadores síncronos o capacitores estáticos, para mantener un perfil de tensión adecuado. El problema consiste en determinar la ubicación y la cuantía y características de los bancos de capacitores.

1.4.1.1 Aplicación de la Programación Lineal

La técnica para la solución de los requerimientos de potencia reactiva, puede ser hecha mediante métodos de programación lineal para buscar el mínimo requerimiento de potencia reactiva y satisfacer las condiciones de tensión especificada.

El método está basado en la linealización de las ecuaciones de flujo de carga, para pequeñas variaciones, el cambio de la magnitud de tensión para un cambio de la potencia reactiva generada está dada por [4]:

$$\Delta Ei \approx \sum X_{ij} \Delta G_j$$

La función objetivo elegida para la minimización es la suma de los ΔQ_J; La solución deseada es minimizar la suma de los requerimientos de potencia reactiva. Se puede añadir el costo por los **MVARS** de capacidad, obteniéndose la suma $Cj\Delta Qj$, donde Cj es el costo del banco por MVAR.

La formulación del problema de programación lineal, y el modelo de Optimización queda expresado por:

Minimizar $\sum_j \Delta Q_j$

Sujeto a:

$$\Delta E_i^n = \sum X_{ij}^n \Delta Q_j$$

$$\Delta Q_j \geq 0$$

donde:

ΔE_i^n	Cambio de la magnitud de tensión en la barra **i**.
X_{ij}	Elemento de la matriz de reactancias.
ΔQ_j	Cambio de los KVARs generados en la barra **i**.
i	Todas las barras que conciernen.
j	Todas las barras donde se puede instalar bancos.
n	Todos los casos considerados.

El costo total será:

$$\sum_j C_j \Delta Q_j$$

1.4.2 Operación Económica del SEP

La operación económica de un sistema eléctrico será óptima, si los costos de generación, son mínimos y son satisfechas las restricciones de red y operación.

La función costo, está expresada por una función polinomial que depende de la potencia generada y está dado por [1]:

$$F_i = \sum_j a_j P_i^j$$

$$P_i^{min} \le P_i \le P_i^{max}$$

El modelo de optimización queda expresado como:

Minimizar $\sum_i F_i$

Sujeto a:

$$\sum_j P_i = P_R + P_L$$

$$P_i^{min} \le P_i \le P_i^{max}$$

donde:

P_i^{min} Mínima Potencia Generada
P_i Potencia Generada
P_i^{max} Máxima Potencia Generada
P_R Demanda de Potencia
P_L Pérdidas de Potencia en el Sistema

La solución de este modelo, también se lo puede realizar mediante la linealización de las ecuaciones [6] y tener una solución aproximada.

1.4.3 Minimización de Pérdidas de Potencia Activa [5]

La minimización, está basada en la formulación del despacho de potencia reactiva, consiste en minimizar las perdidas de potencia activa que se producen en las componentes óhmicas de las ramas del SEP.

La función objetivo está representada por:

Minimizar $P_L = \sum_{k=1}^{nr} G_k \left[V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos(\delta_i - \delta_j) \right]$

sujeto a:

$$Q_i^{min} \le Q_i \le Q_i^{max}$$
$$V_i^{min} \le V_i \le V_i^{max}$$
$$Q_{Ci} = Q_i$$

donde:

V_i Es el módulo de tensión del nodo **i**

$Q_i = \sum_{j=1}^{nr} V_i V_j Y_{ij} sen(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$ Es la potencia reactiva inyectada en el nodo **i**

Q_{Ci} Es la capacidad del banco de capacitores ó inductores, conectado en el nodo **i**

nr Número de ramas del sistema.

El presente modelo, se puede resolver mediante la programación lineal, al linealizar la función objetivo y las restricciones.

Las variables de control del problema, son:

i) Taps de los transformadores, **t**
ii) Tensión en bornes de los generadores, **Vg**
iii) Banco de capacitores e inductores conectado en los nodos, **Q**.

Cualquier cambio en las variables de control afecta a las variables de estado, el perfil de tensiones del sistema y las pérdidas del sistema.

II MÉTODOS DE OPTIMIZACION

2.1 Introducción

Los distintos problemas de optimización considerados en un sistema eléctrico de potencia, en forma general pueden ser formulados o modelados, como:

Minimizar f(x)
sujeto a:
$g(x)=0$
$h(x)\leq 0$
donde:
f() Función Objetivo
g() Restricciones de Igualdad
h() Restricciones de Desigualdad
x Variables de Decisión

Las funciones del modelo de optimización pueden ser lineales ó no-lineales, o una combinación de ambas. Existen diversos métodos y técnicas, para resolver el modelo de optimización.

En general, el problema de maximizar una función f, -hallar el máximo-, se reduce a minimizar la función negativa, -f, que tiene una solución ***v***. La solución del problema original, es -***v***, ya que las restricciones no cambian.

En lo que sigue, se presentan solo problemas de minimización.

2.2 Programación Lineal

En los modelos de optimización lineal, tanto la función objetivo f y las restricciones g, h son funciones lineales.

George B. Dantzig [7], formula en 1947, el problema general de optimización lineal y presenta el **Método Simplex** para su resolución.

Sea el modelo de optimización:

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$
Sujeto a:

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Considerando un espacio bidimensional, en la Fig. 1, se muestra la región solución -región factible-, delimitado por las restricciones. Una forma de visualizar la técnica, es emplear el método gráfico, que consiste en encontrar la región solución, dado por las acotaciones de las restricciones. En forma general, los puntos de intersección de las restricciones lineales -vértices del poliedro-, son los candidatos para ser solución del problema planteado.

En un espacio n-dimensional, la función objetivo, es un hiperplano y las restricciones son otros hiperplanos, entonces la región de intersección será la solución factible.

La región factible, en éste caso, es un poliedro formado por los hiperplanos definidos por las restricciones en el espacio dimensional **n**.

El método simplex, consiste en probar todos los puntos candidatos -intersecciones-, si satisface la condición de optimalidad entonces el punto de intersección en cuestión, será la solución.

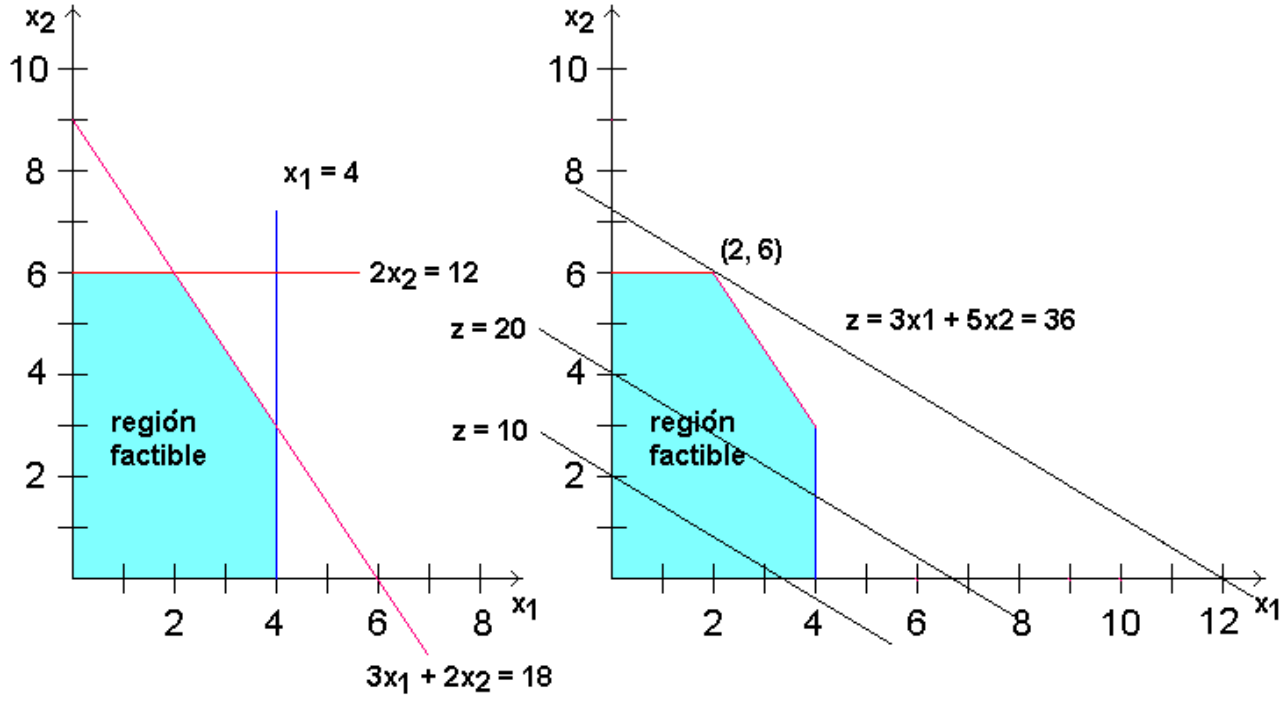


Fig. 1, Solución gráfica

2.2.1 Método Simplex

El método simplex, es ampliamente utilizado para resolver el problema de optimización lineal. Este método, procede con pasos sistemáticos, se parte desde una solución inicial factible, hasta la solución óptima en un número finito de

pasos. Este método puede ser implementado por medio de las siguientes reglas básicas:

1.- Transformar el modelo de optimización lineal a la forma canónica.

Min cX
s.a:
$AX \leq b$
$X \geq 0$

2.- Adicionar las variables de holgura, Y

Min cX
s.a:
$AX + Y = b$
$X \geq 0$
$Y \geq 0$

3.- Construir la tabla con los coeficientes del modelo de optimización

4.- Determinar los costos reducidos z_j-c_j y elegir la más negativa.

5.- Seleccionar el vector de salida, mediante la siguiente regla:

$$\frac{X_{Br}}{Y_{rj}} = \underset{k}{\text{Min}}\left\{\frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0\right\}$$

6.- Efectuar el pivote de Gauss, de tal forma que el vector $\mathbf{a_j}$ sea un vector unitario.

2.2.2 Método Simplex Revisado

El método simplex original, requiere mucha memoria y tiempo para su resolución. La matriz A de los problemas reales, es una matriz muy dispersa, por lo que se desarrolló el método simplex revisado, que tiene las siguientes reglas:

1.- Hallar el vector Básico:

$X_B = B^{-1}b$

2.- Hallar la nueva base
3.- Resolver el sistema

2.2.3 El Problema Dual

Cada problema de programación lineal, tiene un segundo problema asociado con él. Uno se denomina "Primal" y el otro "Dual" [12].

Los dos problemas poseen propiedades muy relacionadas, de tal manera, que la solución óptima de un problema, proporciona información complementaria sobre la solución óptima para el otro.

Si se considera un modelo de optimización, en su forma canónica:

$$\begin{aligned} &\text{Min } cX \\ &\text{s.a:} \\ &\quad AX \leq b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

El problema se denomina primal, su dual asociado estará dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Max } bY \\ &\text{s.a:} \\ &\quad AY \leq c \\ &\quad Y \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces, el problema dual utiliza exactamente los mismos parámetros que el problema primal.

2.2.4 Interpretación de las Variables Duales

Una vez resuelto el modelo de optimización, lo relevante de la solución, son las variables duales, que dan información respecto al mejoramiento de la solución que se puede lograr al modificar las restricciones o variables.

2.3 Software LINDO

El software LINDO (Linear, Interactive, Discrete Optimizer) [8], resuelve programas lineales, enteros y cuadráticos, el modelo de optimización se introduce en forma natural y es muy amigable su utilización.

Este software, inicialmente fue desarrollado en el lenguaje de programación FORTRAN. Actualmente, existe la versión para ambiente Windows.

2.3.1 Aplicaciones

Se presentan dos ejemplos resueltos, utilizando el software LINDO, el primero es un problema de una industria química y el segundo problema es una aplicación a un SEP.

Ejemplo 2.1

Una pequeña empresa produce tres tipos de productos químicos, mezclando en distintas proporciones, tres ingredientes básicos: A, B y C, conforme a las siguientes especificaciones:

Tabla 2-I, Combinación de Ingredientes

Mezcla	Máximo porcentaje de A	Mínimo Porcentaje de C
1	50 %	25 %
2	15 %	65 %
3	5 %	50 %

El precio de venta por kilogramo de mezcla 1, 2 y 3 es 10, 8 y 6 pesos, respectivamente. La empresa estima que puede vender todo lo que produce de cada una de las mezclas.

Los costos, por kilogramos, de A, B y C, son de 3, 2 y 1 pesos, respectivamente y la disponibilidad de B y C, están limitadas a 2850 y 1300 kilogramos semanales respectivamente. Por otra parte, la empresa tiene solo $ 10000 semanales para estos ingredientes básicos para producir sus mezclas.

La empresa quiere saber cómo programar su producción semanal de modo de maximizar sus utilidades.

1) Formule un modelo lineal que permita resolver el problema planteado.

2) Resuelva este Modelo usando el Programa LINDO con análisis de sensibilidad.

Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la solución óptima?

b) ¿Cuál es la utilidad semanal?

c) ¿Cuáles son los porcentajes de ingredientes básicos en la mezcla óptima?
d) ¿Es única la solución óptima?
e) El proveedor decide disminuir en 10 kilogramos la entrega del ingrediente C, devolviendo su costo de $10.¿Es esto lo conveniente para la empresa? Comente.

f) El proveedor ofrece venderle 300 kilogramos adicionales de ingrediente B ¿hasta qué precio estaría la empresa dispuesta a pagar?

g) De acuerdo a los resultados ¿le sugeriría Ud. a la empresa solicitar dinero prestado para adquirir más ingredientes?

¿Qué ingredientes podría adquirir? ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar por cada peso prestado? ¿Hasta cuánto dinero podría solicitar a este precio?

h) Si el precio de venta de la mezcla aumenta en un peso por kilogramo ¿cambia el programa de producción óptimo? ¿Y si aumenta en tres pesos?

i) ¿Cuánto debería aumentar como mínimo el precio de venta de la mezcla 3 para que cambie el programa de producción óptimo?

j) ¿Puede decir algo de la solución óptima, sí el costo del ingrediente A baja a $2,5 el kilogramo?

Resolución

En la resolución del problema se decidió agregar 3 variables adicionales, las que nos permitan tener una visión mas clara del comportamiento de cada una de las mezclas, estas variables son:

Xi: Total de kilos de la mezcla i; i = l, 2, 3

El resto de las variables son:

Xij: cantidad de kilos del ingrediente **j** en la mezcla **i**:

i = 1, 2, 3: j = A, B, C

La utilidad, está dada por la diferencia del ingreso por ventas de la mezcla menos los gastos por compra de insumos -ingredientes-.

La formulación del modelo lineal para resolver el problema, está dada por:

```
TITLE EJEMPLO 2.1: TRES TIPOS DE PRODUCTOS QUIMICOS
MAX     10 X1 + 8 X2 + 6 X3 - 3 X1A - 3 X2A - 3 X3A - 2 X1B - 2 X2B
    - 2 X3B - X1C - X2C - X3C
SUBJECT TO
      2) - X1 + X1A + X1B + X1C =    0
      3) - X2 + X2A + X2B + X2C =    0
      4) - X3 + X3A + X3B + X3C =    0
      5)   0.5 X1A - 0.5 X1B - 0.5 X1C <=   0
      6) - 0.25 X1A - 0.25 X1B + 0.75 X1C >=   0
      7)   0.85 X2A - 0.15 X2B - 0.15 X2C <=   0
      8) - 0.65 X2A - 0.65 X2B + 0.35 X2C >=   0
```

```
 9)  0.95 X3A - 0.05 X3B - 0.05 X3C <=   0
10) - 0.5 X3A - 0.5 X3B + 0.5 X3C >=   0
11)  X1B + X2B + X3B <=   2850
12)  X1C + X2C + X3C <=   1300
13)  3 X1A + 3 X2A + 3 X3A + 2 X1B + 2 X2B + 2 X3B + X1C + X2C + X3C
<=   10000
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)     41500.00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1      5150.000000         0.000000
     X2         0.000000         0.000000
     X3         0.000000         0.000000
    X1A      1000.000000         0.000000
    X2A         0.000000         2.000000
    X3A         0.000000         4.000000
    X1B      2850.000000         0.000000
    X2B         0.000000         2.000000
    X3B         0.000000         4.000000
    X1C      1300.000000         0.000000
    X2C         0.000000         2.000000
    X3C         0.000000         4.000000


    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)         0.000000       -10.000000
     3)         0.000000        -8.000000
     4)         0.000000        -6.000000
     5)      1575.000000         0.000000
     6)        12.500000         0.000000
     7)         0.000000         0.000000
     8)         0.000000         0.000000
     9)         0.000000         0.000000
    10)         0.000000         0.000000
    11)         0.000000         3.333333
    12)         0.000000         6.666667
    13)         0.000000         2.333333

NO. ITERATIONS=       3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                     OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                COEF           INCREASE         DECREASE
    X1       10.000000         INFINITY         2.000000
    X2        8.000000         2.000000         INFINITY
    X3        6.000000         4.000000         INFINITY
   X1A       -3.000000         5.000000         2.000000
```

X2A	-3.000000	2.000000	INFINITY
X3A	-3.000000	4.000000	INFINITY
X1B	-2.000000	INFINITY	2.000000
X2B	-2.000000	2.000000	INFINITY
X3B	-2.000000	4.000000	INFINITY
X1C	-1.000000	INFINITY	2.000000
X2C	-1.000000	2.000000	INFINITY
X3C	-1.000000	4.000000	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	0.000000	5150.000000	INFINITY
3	0.000000	0.000000	INFINITY
4	0.000000	0.000000	INFINITY
5	0.000000	INFINITY	1575.000000
6	0.000000	12.500000	INFINITY
7	0.000000	INFINITY	0.000000
8	0.000000	0.000000	INFINITY
9	0.000000	INFINITY	0.000000
10	0.000000	0.000000	INFINITY
11	2850.000000	150.000000	1890.000000
12	1300.000000	3000.000000	15.000000
13	10000.000000	150.000000	3000.000000

a) ¿Cuál es la solución óptima?

De los datos se desprende que solo se produce la mezcla 1.

Precios duales:

Ingredientes B = 3.3333
Ingredientes C = 6.6667
Del Capital = 2.3333

b) ¿Cuál es la utilidad semanal?

Utilidad semanal: $ 41500

c) ¿Cuales son los porcentajes de los ingredientes básicos de la mezcla óptima?

Porcentaje de ingredientes básicos en la mezcla óptima:

Ingrediente A: 19.41%
Ingrediente B: 55.33%
Ingrediente C: 25.25%

d) ¿Es única la solución óptima?

Sí. La solución óptima es única, ya que los costos reducidos son ceros las variables básicas y mayores que cero en todas las variables no básicas.

Además, todos los multiplicadores de Lagrange (DUAL PRICES) son mayores o iguales que cero, esto asegura que se cumple la condición de optimalidad de Karush (1930), Kuhn-Tucker, Lagrange, (K.K.T.L.)

e) El proveedor decide disminuir en 10 kilos la entrega de ingrediente C, devolviendo su costo de $10.¿Es conveniente para la empresa? .Comente.

No le conviene a la empresa, ya que su beneficio se modifica a $41420.

El análisis de sensibilidad solo nos indica que la cantidad total del ingrediente puede disminuir en 15 kilos, asegurándonos, la invariabilidad de la base, es decir, nos asegura que seguimos produciendo solo la mezcla pero no nos entrega información acerca de la variación del valor óptima o utilidad semanal.

f) ¿El proveedor ofrece venderle 300 kilos adicionales del ingrediente B hasta que precio estaría la empresa disputa a pagar? y ¿si ofreciera 140 kilos?.

Del análisis de sensibilidad se desprende que no se deben comprar los 300 kilos del producto B, ya que B = 3150 se encuentra fuera del rango permitido $1216.666626 \leq bB \leq (3000)$ y así se asegura la permanecía de la base. En el caso que solo se compraran 150 Kilos, que es el máximo permitido, es necesario cambiar la restricción 11, obteniéndose los siguientes resultados:

Utilidad semanal: $42000
Mezcla 1: 52000 kilos (única que se produce)
Ingrediente A: 900 kilos
Ingrediente B: 3000 kilos
Ingrediente C: 1300 Kilos

La diferencia de utilidad es de $500 que es lo máximo que se está dispuesto a pagar por esos 150 kilos.

El precio máximo a pagar es de $500/150 kg = 3.3333 $/kg

El ofrecimiento de 140 kg del ingrediente B, no modifica la base óptima del problema, ya se encuentra dentro del rango dado el análisis de sensibilidad.

Utilidad semanal : $ 41966.67
Mezcla 1 : 5196.6667 kilos
Ingrediente A : 906.6667 kilos.

La nueva diferencia de utilidad es de $466.67 que es lo máximo que se esta dispuesto a pagar por los 140 kilos.

El precio máximo a pagar es de $466.67/140 kg = 3.3333 $/kg.

Lo cual esta confirmado por el precio dual Y_B = 3.3333

g) ¿De acuerdo a los resultados, le sugerirá Ud. a la empresa solicitar dinero prestado para adquirir mas ingredientes?.¿Que ingredientes podría adquirir?.¿Hasta cuanto dinero podría solicitar a este precio?.

- Si. Se recomienda a la empresa obtener un préstamo.

- Las restricciones 11 y 12 están ambas activas (ya que el valor de las variables de holgura es cero), es decir, se ha utilizado toda la cantidad disponible que hay de los ingredientes B y C, por tanto solo se puede comprar A, que no tiene restricciones.

- Por análisis de sensibilidad, se ve que le dinero pude aumentar hasta $ 10150 sin que modifique el programa de producción óptimo, así se pedirá un préstamo de $150, comprándose 50 kilos mas de ingrediente A: se obtiene:

  Utilidad semanal: $41850

  7*1050+8*2850+9*1300= 41850

Este deja utilidades extra de: $350 = (41850-41500)

Así la empresa estaría dispuesta a pagar hasta: (350/150)= $2.3333 por cada peso prestado. Lo cual confirma con el precio dual 2.3333

h) Si el precio de venta de la mezcla 2 aumenta en un peso por kilo.¿Cambia el programa de producción óptimo?.¿Y si aumenta en 3 pesos?.

Por el análisis de sensibilidad se ve que le incremento máximo del precio de venta de la mezcla 2 es $2 y el decremento es máximo es infinito. Sin que se modifique el programa de producción óptimo: por tanto, si aumenta en $1 por kilo no cambia el programa óptimo: y a su vez si aumenta en $3, se supera el incremento permitido, cambiando el programa de producción óptima.

i) ¿Cuanto debería aumentar como mínimo el precio de venta de la mezcla 3 para que cambie el programa de producción óptima?.

Por el análisis de sensibilidad se ve que le precio de venta de la mezcla puede incrementar en $4 sin modificar el programa de producción óptimo, por tanto debe aumentar como mínimo en mas de $4 para modificar al programa de producción.

j) ¿Puede decir algo de la solución óptima si el costo del ingrediente A, baja a $2.5 el kilo?.

Si el costo del ingrediente A solo influyera en la función de costo se desprendería el siguiente análisis:

Que el costo del ingrediente A baja a $2.5 significa en -5; esto se modifica en -5 el costo X1A, X2A y X3A, los cuales pueden disminuir respectivamente en 2, infinito e infinito.

En los tres es posible la modificación sin que cambie el programa óptimo, y la solución óptima sigue siendo la misma (el valor óptimo aumente en $ 500).

Este análisis no se puede aceptar porque el costo del ingrediente A también influye en una restricción lo que nos lleva a plantear un nuevo modelo:

```
TITLE EJEMPLO 2.1: TRES TIPOS DE PRODUCTOS QUIMICOS CON MODIFICACIONES
MAX     10 X1 + 8 X2 + 6 X3 - 2.5 X1A - 2.5 X2A - 2.5 X3A - 2 X1B
    - 2 X2B - 2 X3B - X1C - X2C - X3C
SUBJECT TO
      2) - X1 + X1A + X1B + X1C =    0
      3) - X2 + X2A + X2B + X2C =    0
      4) - X3 + X3A + X3B + X3C =    0
      5)   0.5 X1A - 0.5 X1B - 0.5 X1C <=   0
      6) - 0.25 X1A - 0.25 X1B + 0.75 X1C >=   0
      7)   0.85 X2A - 0.15 X2B - 0.15 X2C <=   0
      8) - 0.65 X2A - 0.65 X2B + 0.35 X2C >=   0
      9)   0.95 X3A - 0.05 X3B - 0.05 X3C <=   0
     10) - 0.5 X3A - 0.5 X3B + 0.5 X3C >=   0
     11)   X1B + X2B + X3B <=   2850
     12)   X1C + X2C + X3C <=   1300
     13)   2.5 X1A + 2.5 X2A + 2.5 X3A + 2 X1B + 2 X2B + 2 X3B + X1C
    + X2C + X3C <=   10000
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      5

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)     42375.00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1      5200.000000          0.000000
      X2         0.000000          0.000000
      X3         0.000000          0.000000
     X1A      1050.000000          0.000000
     X2A         0.000000          0.000000
     X3A         0.000000          0.000000
     X1B      2850.000000          0.000000
     X2B         0.000000          0.000000
     X3B         0.000000          0.000000
```

```
X1C      1300.000000         0.000000
X2C         0.000000        21.538462
X3C         0.000000        23.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
 2)         0.000000       -10.000000
 3)         0.000000        -8.000000
 4)         0.000000        -6.000000
 5)      1550.000000         0.000000
 6)         0.000000       -30.000000
 7)         0.000000         0.000000
 8)         0.000000        -8.461538
 9)         0.000000         0.000000
10)         0.000000        -7.000000
11)         0.000000         0.500000
12)         0.000000        31.500000
13)       375.000000         0.000000
```

Este modelo arroja como resultado:

Beneficio semanal : $42375
Mezcla 1 : 5200 kilos (Única que se produce)
Ingrediente A : 1050 kilos
Ingrediente B : 2850 kilos
Ingrediente C : 1300 kilos

En el anexo A.2, se presenta la misma solución, utilizando la rutina SOLVER de la hoja electrónica Microsoft EXCEL [13]. La rutina SOLVER, resuelve problemas: lineales, lineales-enteros y no-lineales. Los datos del modelo, deben ser introducidos en la hoja de cálculo, en el formato requerido por EXCEL.

Ejemplo 2.2

Una empresa eléctrica, desea ampliar su sistema de transmisión, para satisfacer el crecimiento de la demanda de potencia [15]. Inicialmente el sistema consta de 5 barras, una vez realizada la predicción de la demanda y generación, en la tabla 2-11, se tiene la programación de la generación. Y en la tabla 2-III, están los datos de las longitudes entre las distintas barras.

Tabla 2-II, Datos de Potencia Inyectada

Barra	Generación	Carga	P_G - P_D
1	50	80	-30
2	0	240	-240
3	165	40	125
4	0	160	-160
5	0	240	-240
6	545	0	545

Tabla 2-III, Longitudes entre las distintas barras

P-Q	Longitud [Mi]	P-Q	Longitud [Mi]
1-2	40	3-4	59
1-3	38	3-5	20
1-4	60	3-6	48
1-5	20	4-5	63
1-6	68	4-6	30
2-3	20	5-6	61
2-4	40		
2-5	31		
2-6	30		

Las líneas tienen una capacidad de 100 MVA, estos límites están dados por consideraciones de estabilidad. En la Fig. 2, se muestra el sistema de potencia, tomado de la referencia [15].

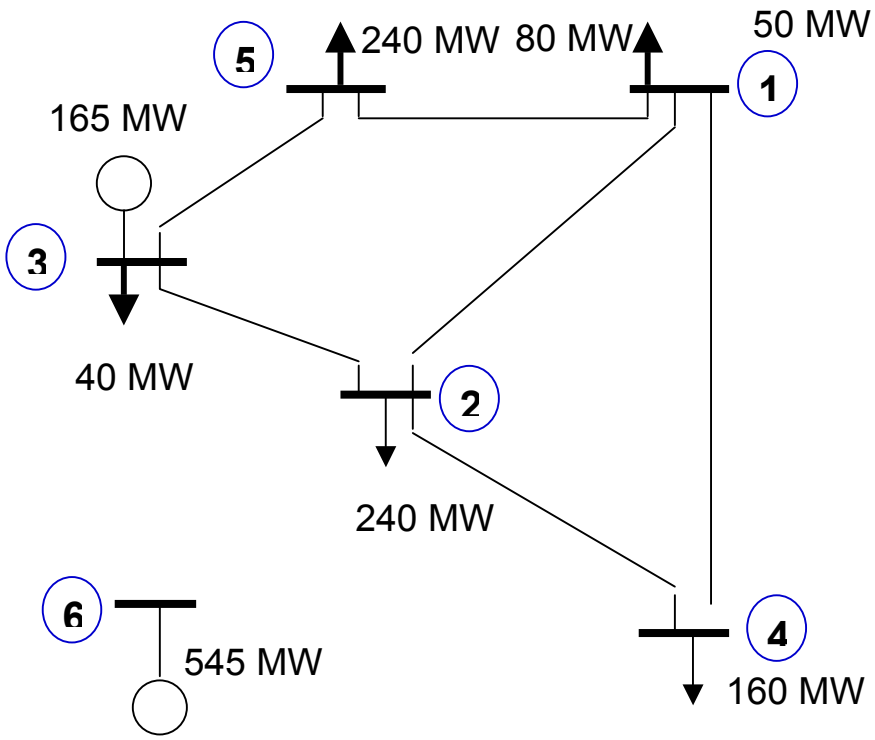


Fig. 2. Estado del Sistema de Potencia.

Para resolver este problema, se plantea un problema de optimización, sobre la base del modelo de transbordo -caso particular del modelo de transporte-, donde existen nudos fuentes, nudos de demanda y nudos de transbordo [16].

La formulación matemática del problema de transporte con transbordo, queda de la siguiente forma:

$$\text{Min} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} C_{ij} X_{ij}$$

s.a :

$$\sum_{j \in N} X_{ij} = a_i + K; \quad \text{para } i \in N$$

$$\sum_{i \in N} X_{ij} = b_j + K; \quad \text{para } j \in N$$

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij}$$

donde:

I = {1, 2, ..., m} = Nudos fuente (generadores)
J = {1, 2, ..., n} = Nudos de demanda (cargas)
N = I∪J
a_i = Generación en el nudo ***i***, para ***i*** ∈ N
b_j = Demanda en el nudo ***j***, para ***j*** ∈ N
C_{ij} = 'Costo' de transportar potencia desde el nudo **i** hasta el nudo **j**
X_{ij} = Cantidad de potencia enviada de ***i*** hasta ***j***
U_{ij} = Límite superior del flujo de potencia enviada desde ***i*** hasta **j**. Determinada por la capacidad de la línea de transmisión
K = Suma de las demandas ó generación

Si i ∈ I, entonces $a_i > 0$; de otro modo $a_i = 0$. Si j ∈ J, entonces $b_j > 0$; de otro modo $b_j = 0$.
$C_{ij} = 0$ para todo i ∈ N

El costo de retener el exceso de potencia en un nudo ***i***, es cero para todo ***i***. La variable X_{ii}, se puede interpretar como una variable slack. Si no existe conexión entre los nudos ***i*** y ***j***, entonces se asume que $C_{ij} = \infty$.

La razón para añadir el número K [17], es que no se conoce de antemano la demanda en un nudo de transbordo. Y así la demanda ó generación se hace grande en un nudo.

Los costos de transportar potencia de un nudo a otro, se suponen que son proporcionales a su longitud. En la tabla 2-IV, se tienen los "costos" de transporte.

Tabla 2-IV, Costo de transporte

		1	2	3	4	5	6	Generación
		G3	G6	D1	D2	D4	D5	Generación
1	G3	0	48	38	20	59	20	795
2	G6	48	0	68	30	30	61	1215
3	D1	38	68	0	40	60	20	670
4	D2	20	30	40	0	40	31	670
5	D4	59	30	60	40	0	63	670
6	D5	20	61	20	31	63	0	670
Demanda		670	670	700	910	830	910	

Se asume que el costo de transportar de un nudo **i** a otro **j**, es igual al costo de transportar de **j** hasta **i**.

La formulación del modelo lineal para resolver el problema y la solución del modelo usando el programa LINDO, son:

```
 TITLE EJEMPLO 2.2: L. L. GARVER
MODIFICACIONES
 MIN     48 X12 + 38 X13 + 20 X14 + 59 X15 + 20 X16 + 48 X21 + 68 X23
     + 30 X24 + 30 X25 + 61 X26 + 38 X31 + 68 X32 + 40 X34 + 60 X35
     + 20 X36 + 20 X41 + 30 X42 + 40 X43 + 40 X45 + 31 X46 + 59 X51
     + 30 X52 + 60 X53 + 40 X54 + 63 X56 + 20 X61 + 61 X62 + 20 X63
     + 31 X64 + 63 X65
 SUBJECT TO
      2)   X12 + X13 + X14 + X15 + X16 + X11 =    795
      3)   X21 + X23 + X24 + X25 + X26 + X22 =    1215
      4)   X31 + X32 + X34 + X35 + X36 + X33 =    670
      5)   X41 + X42 + X43 + X45 + X46 + X44 =    670
      6)   X51 + X52 + X53 + X54 + X56 + X55 =    670
      7)   X61 + X62 + X63 + X64 + X65 + X66 =    670
      8)   X21 + X31 + X41 + X51 + X61 + X11 =    670
      9)   X12 + X32 + X42 + X52 + X62 + X22 =    670
     10)   X13 + X23 + X43 + X53 + X63 + X33 =    700
     11)   X14 + X24 + X34 + X54 + X64 + X44 =    910
     12)   X15 + X25 + X35 + X45 + X65 + X55 =    830
     13)   X16 + X26 + X36 + X46 + X56 + X66 =    910
 END

 LP OPTIMUM FOUND AT STEP     11

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)     23555.00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X12         0.000000        89.000000
     X13         0.000000        11.000000
     X14         0.000000        31.000000
```

X15	0.000000	70.000000
X16	125.000000	0.000000
X21	0.000000	7.000000
X23	30.000000	0.000000
X24	240.000000	0.000000
X25	160.000000	0.000000
X26	115.000000	0.000000
X31	0.000000	65.000000
X32	0.000000	136.000000
X34	0.000000	78.000000
X35	0.000000	98.000000
X36	0.000000	27.000000
X41	0.000000	9.000000
X42	0.000000	60.000000
X43	0.000000	2.000000
X45	0.000000	40.000000
X46	0.000000	0.000000
X51	0.000000	48.000000
X52	0.000000	60.000000
X53	0.000000	22.000000
X54	0.000000	40.000000
X56	0.000000	32.000000
X61	0.000000	40.000000
X62	0.000000	122.000000
X63	0.000000	13.000000
X64	0.000000	62.000000
X65	0.000000	94.000000
X11	670.000000	0.000000
X22	670.000000	0.000000
X33	670.000000	0.000000
X44	670.000000	0.000000
X55	670.000000	0.000000
X66	670.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	41.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	68.000000
5)	0.000000	30.000000
6)	0.000000	30.000000
7)	0.000000	61.000000
8)	0.000000	-41.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	-68.000000
11)	0.000000	-30.000000
12)	0.000000	-30.000000
13)	0.000000	-61.000000

Analizando los resultados representados en la Fig. 3a, permite afirmar que es necesario la construcción de 4 nuevas líneas. Por otra parte, los flujos en 4 líneas son ceros, es decir, son sub-utilizadas.

Considerando, que solo se pueden construir líneas con capacidad de 100 MVA y que las nuevas líneas se deben conectar a las barras cercanas al nudo generador. Esta situación se puede simular

considerando que los costos de transporte a los nudos lejanos, son altos, en este caso, se considera que los costos son 5 veces.

La reformulación del problema conduce a un nuevo modelo de optimización y los resultados no nulos entregados por el software LINDO, son:

```
TITLE EJEMPLO 2.2: L. L. GARVER (MODIFICADO)
MIN     48 X12 + 38 X13 + 20 X14 + 59 X15 + 20 X16 + 240 X21 + 340 X23
    + 30 X24 + 30 X25 + 305 X26 + 38 X31 + 68 X32 + 40 X34 + 60 X35
    + 20 X36 + 20 X41 + 30 X42 + 40 X43 + 40 X45 + 156 X46 + 59 X51
    + 30 X52 + 60 X53 + 40 X54 + 63 X56 + 20 X61 + 61 X62 + 20 X63
    + 31 X64 + 63 X65
SUBJECT TO
      2)   X12 + X13 + X14 + X15 + X16 + X11 =    795
      3)   X21 + X23 + X24 + X25 + X26 + X22 =    1215
      4)   X31 + X32 + X34 + X35 + X36 + X33 =    670
      5)   X41 + X42 + X43 + X45 + X46 + X44 =    670
      6)   X51 + X52 + X53 + X54 + X56 + X55 =    670
      7)   X61 + X62 + X63 + X64 + X65 + X66 =    670
      8)   X21 + X31 + X41 + X51 + X61 + X11 =    670
      9)   X12 + X32 + X42 + X52 + X62 + X22 =    670
     10)   X13 + X23 + X43 + X53 + X63 + X33 =    700
     11)   X14 + X24 + X34 + X54 + X64 + X44 =    910
     12)   X15 + X25 + X35 + X45 + X65 + X55 =    830
     13)   X16 + X26 + X36 + X46 + X56 + X66 =    910
     14)   X16 <=   200
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP     17

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      25450.00
VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X16       200.000000          0.000000
    X24       385.000000          0.000000
    X25       160.000000          0.000000
    X36        40.000000          0.000000
    X41        75.000000          0.000000
    X43        70.000000          0.000000
    X11       595.000000          0.000000
    X22       670.000000          0.000000
    X33       630.000000          0.000000
    X44       525.000000          0.000000
    X55       670.000000          0.000000
    X66       670.000000          0.000000

    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         0.000000         50.000000
      3)         0.000000          0.000000
      4)         0.000000         70.000000
      5)         0.000000         30.000000
      6)         0.000000         30.000000
      7)         0.000000         90.000000
```

8)	0.000000	-50.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	-70.000000
11)	0.000000	-30.000000
12)	0.000000	-30.000000
13)	0.000000	-90.000000
14)	0.000000	20.000000

La solución final, requiere la construcción de 7 líneas con capacidad de 100 MVA: 4 líneas en paralelo entre G6 y D2, 2 líneas en paralelo entre G6 y D4, una línea en paralelo entre G3 y D5. Quedarían 2 líneas con flujo cero, es decir, son sub-utilizadas. Los resultados se ilustran en la Fig. 3b.

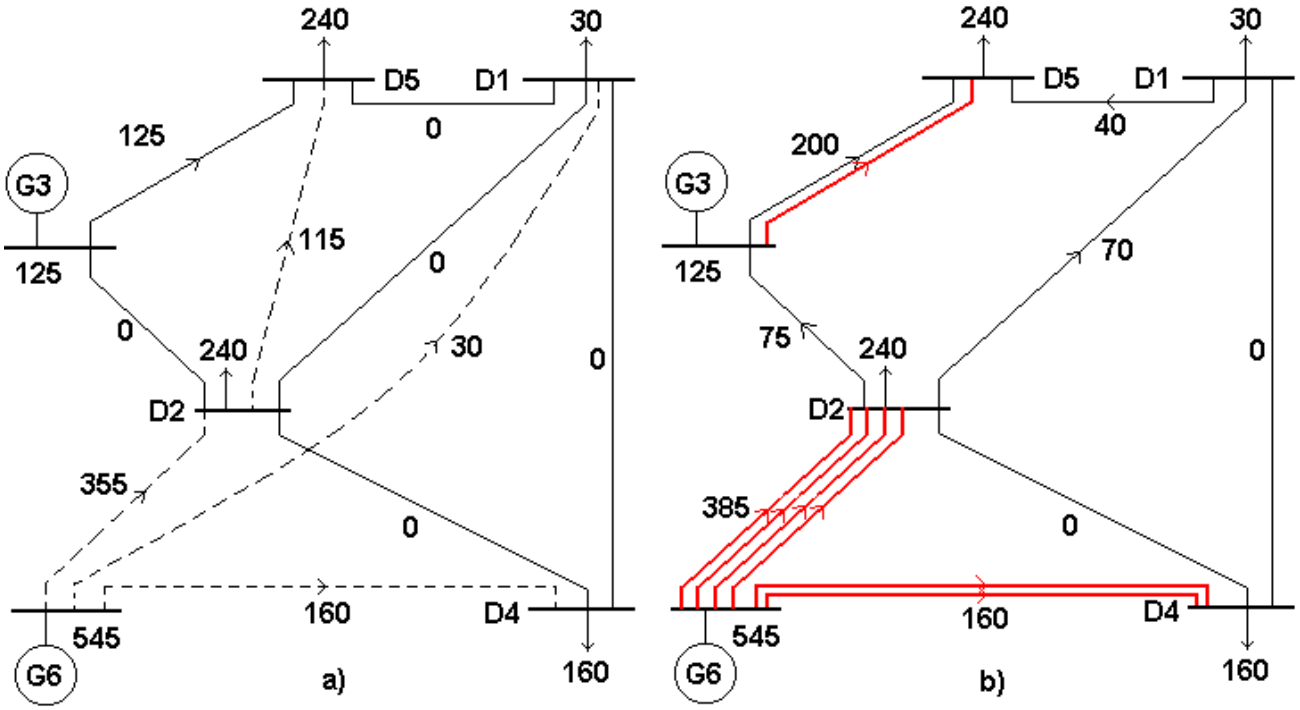


Fig. 3 Resultados del problema de planificación de la expansión

2.4 Programación No-Lineal

El modelo de optimización no-lineal;

Minimizar f(x)
sujeto a:
$g(x) = 0$
$h(x) \leq 0$
donde:
f() Función Objetivo
g() Restricciones de Igualdad
h() Restricciones de Desigualdad
x Variables de Decisión

2.4.1 Técnica de los Multiplicadores de Lagrange

Si el modelo de optimización, solo contiene restricciones de igualdad, se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange (1780).La filosofía del método, consiste en que la optimización del problema n-dimensional, se convierte en un problema 2n-dimensional de ecuaciones, sea:

Minimizar f(x)
sujeto a:
$g(x) = 0$
donde:
x Vector de variables reales de dimensión n

La función de Lagrange, se forma como:

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x)$$

donde:
λ_i Multiplicador de Lagrange

La condición necesaria para obtener el óptimo, está dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Del conjunto de (n+m) ecuaciones, se obtienen (n+m) incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, la solución de la cual da el punto óptimo en la región factible.

2.4.2 Técnica de los Multiplicadores de Kuhn-Tucker

Si el modelo de optimización, además contiene restricciones de desigualdad, se aplica el método de los multiplicadores de Kuhn-Tucker (1955).

Sea el problema de optimización:

Minimizar f(x)
sujeto a:
$g(x)=0$
$h(x)\leq 0$
donde:
x Vector de variables reales de dimensión n

La función de Lagrange aumentada, se forma como:

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k h(x)$$

donde:

λ_i Multiplicador de Lagrange
μ_k Multiplicador de Kuhn-Tucker

Las condiciones para obtener el óptimo de la función de Lagrange, están dadas por:

1. $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

2. $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = g(x) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m$

3. $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k} = h(x) \le 0; \quad k = 1, 2, \ldots, p$

4. $\mu_k \cdot h(x) = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, m$

   $\mu_k \ge 0$

Para determinar las (n+m+p) incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, es necesario resolver el conjunto de (n+m+p) ecuaciones. La solución, da el punto óptimo en la región factible.

2.5 Software EUREKA

Eureka: The Solver [9], es un software desarrollado por la BORLAND INTERNATIONAL, Inc., con las siguientes características:

i) Resolución de ecuaciones (lineales, no-lineales y trascendentes).
ii) Resolución de polinomios de orden mayor.
iii) Evaluación de derivadas y integrales.
iv) Minimización y maximización de funciones con y sin restricciones.

El editor de Eureka, prácticamente es igual al editor del Turbo Pascal.

2.5.1 Aplicaciones

El software Eureka, se aplica a la resolución de un problema, tomado del apéndice del capítulo 3 de la referencia [1].

Ejemplo 2.3

El modelo de optimización, está dado por:

Minimizar $f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + x_2^2$

sujeto a : $g(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2 = 0$

$h(x_1, x_2) = x_1 + 0.2x_2 - 3 \leq 0$

La función de Lagrange aumentada, es:

$$\mathscr{L} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

$$\mathscr{L} = 0.25x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2) + \mu(x_1 + 0.2x_2 - 3)$$

La primera condición establece, que:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0.5x_1 - \lambda + \mu = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda + 0.2\mu = 0$$

La segunda condición establece, que:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = g(x) = 5 - x_1 - x_2 = 0$$

La tercera condición establece, que:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mu} = x_1 + 0.2x_2 - 3 \leq 0$$

La cuarta condición establece, que:

$$\mu(x_1 + 0.2x_2 - 3) = 0$$

$$\mu \geq 0$$

La solución del problema, aplicando la condición de optimalidad de K.K.T.L, es:

$f = 7.8125$

$x_1 = 2.5$

$x_2 = 2.5$

$\lambda = 5.9375$

$\mu = 4.6875$

La solución del problema, resuelto por Eureka, entrega el siguiente reporte:

```
**************************************************************
Eureka: The Solver, Version 1.0
Thursday June 19, 2003, 8:53 pm.
Name of input file: D:\OPTIMI~1\EUREKA\EJEM23
**************************************************************
```

```
; Ejemplo 2.3

f=0.25*x1^2+x2^2

$min(f)

x1 + x2 = 5
x1 + 0.2*x2 <= 3
```

****

Solution:

Variables		Values
f	=	7.8125000
x1	=	2.5000000
x2	=	2.5000000

Confidence level = 98.6%
All constraints satisfied.

****

La desventaja del software Eureka, es que no entrega los valores de las variables duales, es decir, los multiplicadores de Lagrange y Kuhn-Tucker. Estos multiplicadores, indican como se mejoraría la solución al modificar cualquiera de las restricciones del problema.

III OPERACIÓN ECONÓMICA DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

3.1 Introducción

La operación económica de sistemas eléctricos de potencia, consiste en minimizar los costos de operación del sistema, sujeto a las restricciones de red y operación. Para lo cual, se deberá modelar las centrales eléctricas -térmicas e hidráulicas-, la red y la demanda [1]. El fundamento del problema de operación económica, se basa en el conjunto de características de entrada-salida de las unidades de generación: térmica -vapor, fuel, diesel y gas-, nuclear e hidráulica.

Este problema, conocido también como el problema del despacho económico, busca un nivel de generación para cada uno de los generadores disponibles, tal que el costo total de operación sea el mínimo para satisfacer a toda la carga y las perdidas [10].

Se supone que existen N unidades, conectadas al sistema, el propósito del problema, es encontrar una política de operación óptima, para estas N unidades. El sistema consiste en N unidades térmicas de generación, conectados a una barra-colectora única que suministra energía a la carga que tiene una demanda Pg, las unidades hidráulicas se consideran como unidades térmicas equivalentes. Como, las pérdidas de transmisión son importantes, entonces se deberá incluir en la modelación del sistema.

Por otra parte, el problema de entrada en servicio de una unidad u otra, es más complejo y se denomina pre-despacho de carga –unit commitment-.El problema es dificultoso de resolver matemáticamente, ya que involucra variables enteras binarias (1 - O, on - off).

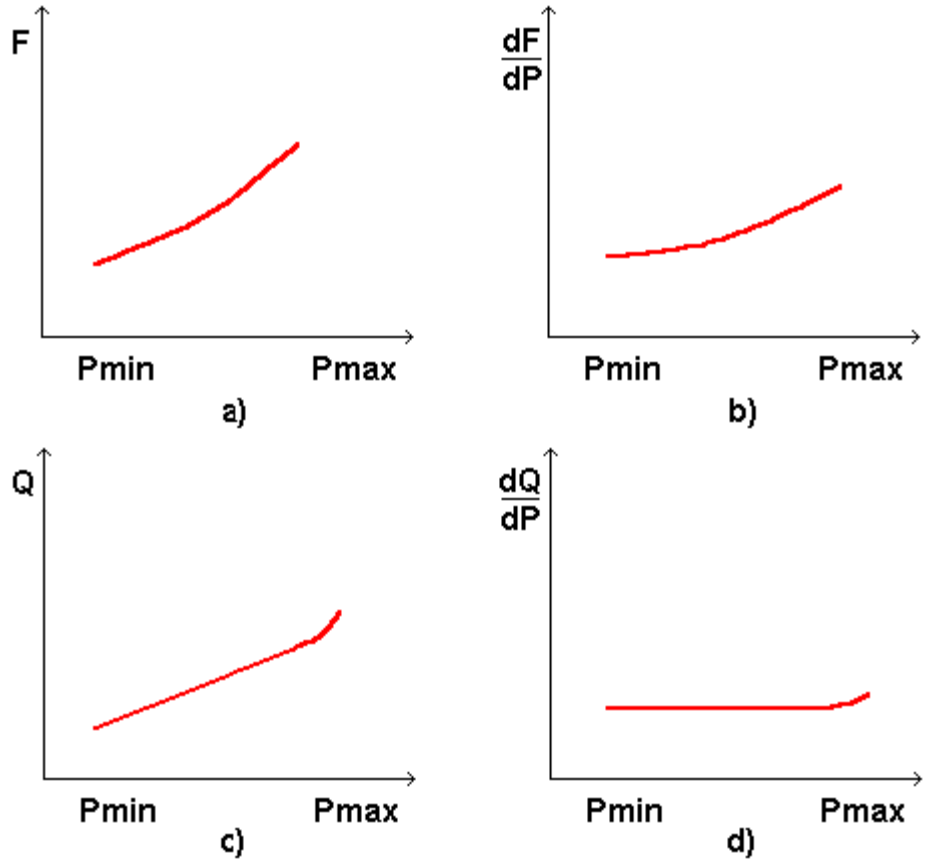
Esto es, un generador en particular tienen que estar conectado o desconectado de la red, pero no todos los generadores estarán conectados al sistema, sino de acuerdo a los requerimientos operacionales; satisfacer la demanda y disponer de suficiente reserva en giro para enfrentar una contingencia, pero la cuestión es; cuál será la política óptima. Para resolver el problema, existen tres técnicas ampliamente utilizadas, que son: la lista de prioridades, la programación entera-mixta y la programación dinámica. Este problema, no se aborda en el presente trabajo.

3.2 Modelación de Centrales

Para analizar los problemas asociados con el control de la operación de sistemas eléctricos de potencia, es necesario conocer muchos de los parámetros de interés, principalmente el comportamiento de las plantas de generación.

Una turbina de vapor típica, requiere de 2 a 6%- de la salida de la unidad para los servicios auxiliares: bombas de alimentación de la caldera, ventiladores, bombas para la circulación de agua en el condensador, etc. La salida eléctrica, no está conectada solamente al sistema eléctrico de potencia, sino también al sistema de potencia auxiliar en la central eléctrica.

La salida neta de la planta, es la potencia eléctrica disponible para ser utilizado por el sistema eléctrico de potencia, y es una información útil para planificar la generación. En la Fig. 4c y 4b, se muestra la característica entrada-salida típica



de una planta térmica.

Fig. 4 Característica Entrada-Salida típica de plantas: térmicas e hidráulicas

donde:

F Costo de combustible
P Potencia de salida
Q Caudal de agua turbinada

Ocasionalmente, F, es el costo operativo por hora de una unidad que incluye los costos de operación y mantenimiento, adecuadamente prorrateado.

A finales de los 1960, un nuevo tipo de configuración de planta de vapor, la planta de ciclo combinada, comenzó a ser utilizado en mayor grado.

Una Turbina de gas de ciclo simple, consiste en una turbina y compresor de gas conectados por un eje único a una unidad generadora.

La turbina de gas de ciclo simple, tiene un rendimiento en el rango de 25 al 30% (es decir, la tasa de calor de unidad de 13.600 a 11.400 MBTU/KWH basado en el valor de calentamiento más alto del combustible), requiere diesel o gas como combustible, y se utilizan principalmente, para horas punta en los sistemas eléctricos.

Un reactor nuclear, utiliza como combustible, uranio ligeramente enriquecido, como fuente de suministro de energía básica.

Durante el período de tiempo, en que el combustible está en el reactor, se genera calor y vapor que acciona una turbina de vapor convencional, y la potencia eléctrica se obtiene del generador que es accionado por la turbina. La cantidad de material fisionable utilizado va decreciendo, y no es capaz de mantener un nivel de potencia adecuado, de modo que el combustible tiene que ser retirado y el reactor se recarga con un nuevo combustible.

En la instalación de una planta sobre la base de reactores nucleares, será necesario tomar en cuenta que los reactores comerciales disponibles, tiene una capacidad como mínimo una potencia de 1000 MW, para una operación rentable. Se utiliza como planta base.

Una Planta hidroeléctrica, tiene características de entrada-salida similares que una turbina de vapor, pero sus costos marginales, pueden despreciarse, debido principalmente a que el "combustible" agua no tiene costo -es gratuito-.En el despacho económico, una planta hidroeléctrica se representa por un modelo térmico equivalente, para representar las restricciones de escasez de agua en períodos de sequías.

La entrada, está en función de volumen de agua por tiempo unitario y la salida está en función de la potencia eléctrica. La Fig. 4c y 4d, muestra una curva de entrada-salida típica, para una planta hidroeléctrica donde la caída hidráulica neta es constante.

Estas características, muestran una curva casi lineal del requerimiento de volumen de agua de entrada por unidad de tiempo como función de la potencia disponible, a medida en que aumenta la potencia desde un mínimo hasta plena carga.

En muchas plantas, los sistemas de ríos están conectados tanto en serie como en paralelo -hablando hidráulicamente-.En este caso, la liberación de aguas arriba de una planta, contribuye a la afluencia de la planta, río abajo -conocido como acoplamiento hidráulico-, La situación se pone aún más compleja, cuando las

plantas de bombeo-almacenamiento, están construido conjuntamente con plantas hidroeléctricas convencionales.

El problema del uso óptimo de estos recursos, involucra problemas complicados, que están asociados con la planificación del uso de aguas, así como la operación óptima del sistema eléctrico y minimizar costos de producción [11].

Debido a la importancia del acoplamiento hidráulico entre plantas, se puede afirmar que no existen dos sistemas hidroeléctricos que sean exactamente iguales.

Por otra parte, las plantas hidráulicas, se utiliza solamente durante los períodos donde las unidades térmicas tienen altos costos de generación. Otras veces, se consideran como unidades de disponibilidad rápida ("reserva en giro").

3.3 Modelo del Despacho de Carga Económico

El modelo de optimización, queda formulada como sigue:

$$\text{Min } F_T = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i)$$

s. a :

$$P_R + P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0$$

$$P_i^{min} \le P_i \le P_i^{min}$$

donde:

P_R Demanda de Potencia
P_L Pérdidas de potencia en el sistema
P_i Potencia entregada por el generador i

Es un problema de optimización no-lineal, con restricciones de igualdad y desigualdad.

Para las restricciones de desigualdad, las condiciones necesarias para la solución, son:

$$\frac{dF_i}{dP_i} = \lambda \quad \text{para } P_i^{min} \le P_i \le P_i^{max}$$

$$\frac{dF_i}{dP_i} \le \lambda \quad \text{para } P_i = P_i^{max}$$

$$\frac{dF_i}{dP_i} \ge \lambda \quad \text{para } P_i = P_i^{min}$$

3.4 Métodos de Solución

Existen varios métodos para resolver el problema, que se pueden dividir en:

- Métodos generales
- Métodos particulares

Entre los métodos generales, se pueden mencionar el método del gradiente del descenso más pronunciado que es ampliamente empleado para resolver problemas de gran dimensionalidad.

Entre los métodos particulares –enfocados a las particularidades del problema-, se tienen los siguientes:

- Iterativo Lambda,
- Gradiente de 1er orden,
- Gradiente de 2do orden y
- Factores de participación.

3.4.1 Método Iterativo Lambda

El método iterativo Lambda, para resolver el problema del despacho de carga económico en sistemas térmicos [1], es de fácil implementación computacional.

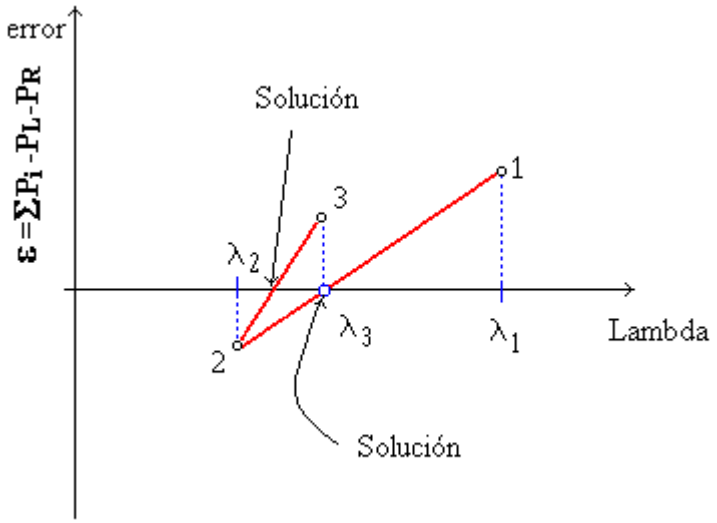


Fig. 5 Ilustración gráfica del método lambda

Para enfocar la solución de este problema y comprender el método, es necesario apoyarse en una técnica gráfica para resolver el problema y entonces extender éste, por medio de algoritmos e implementarlo en un programa computacional.

Al elegir un valor para lambda, sobre la base de una cierta heurística, está determinado la generación para cada planta, la generación total será mayor ó

menor que la demanda, estableciéndose un error, al considerar otro valor de lambda, se tendrá un nuevo error.

En la Fig. 5, se muestra una gráfica del error vs lambda (costo incremental). Considerando, dos puntos, se puede hallar la intersección con el eje lambda -proyección-, donde el error será pequeño y se tiene un nuevo lambda, precediéndose de igual modo, hasta que el error sea menor a la tolerancia especificada. Con dos soluciones, se puede extrapolar (o interpolar) entre las dos soluciones, y se está más cerca del valor deseado de potencia total.

En el anexo A.3, se muestra un diagrama de bloques del método iterativo lambda [1].

3.5 Costos Marginales

Si se considera la estructura de costos de una empresa del sector eléctrico, sus costos totales son los costos relacionados con servir una demanda dada en un horizonte específico de tiempo. Tiene una componente fija y otra variable.

Los costos fijos están relacionados con decisiones de costos de inversión y los costos variables son todos los costos de operación: Costo de combustible, operación y mantenimiento [14].

$$\text{Costos Marginales} = \frac{\text{d(Costos Totales)}}{\text{d(Carga)}}$$

Un supuesto básico es considerar que los costos fijos no son afectados por variaciones de la carga. Por lo que, los costos marginales están determinados por los costos variables:

$$\text{Costos Marginales} = \frac{\text{d(Costos Variables)}}{\text{d(C arg a)}}$$

Los costos marginales de energía, se calculan por medio del despacho de carga económico de todos los generadores conectados a una barra única. Por medio de los factores de penalización se distribuyen los costos geográficamente.

Los costos marginales instantáneos (spot price) o costo marginal a corto plazo de la potencia activa, están dados por:

$$\sigma_k = \gamma + \gamma \frac{\partial L}{\partial D_k} - \sum \mu \frac{\partial Z}{\partial D_k}$$

donde:

σ_k Costo marginal para el nudo -barra- k

γ Costo marginal de generación, denominado "sistema lambda", común a todos los nudos.

$\frac{\partial L}{\partial D_k}$ Costo marginal de pérdidas. L son las pérdidas en el sistema

$\sum \mu \frac{\partial Z}{\partial D_k}$ Costo marginal de restricciones. Z son las restricciones de red: Límite térmico de transferencia, límites de estabilidad, restricciones de seguridad, límites de potencia reactiva, etc.

Los dos últimos términos dependen del nudo en cuestión.

Los costos incrementales, se calculan en función de incrementos. Mientras que los costos marginales, se calculan como la derivada.

Para fines prácticos, se puede considerar que son iguales.

3.6 Pérdidas de Transmisión

Las pérdidas de un sistema eléctrico -pérdidas en el sistema de transmisión-, pueden representarse aproximadamente por [1]:

$$P_L = P^T [B] P + P^T B_0 + B_{00}$$

donde:

P Vector de Generación en MW
[B] Matriz cuadrada de la misma dimensión de P
B_0 Vector de la misma dimensión de P
B_{00} Constante

La ecuación se denomina, formula de pérdidas. Y puede re-escribirse como:

$$P_L = \sum_i \sum_j P_i B_{ij} P_j + \sum_i P_i B_{i0} + B_{00}$$

La suposición básica, para la obtención de la formula, es que la carga de cada barra se comporta del mismo modo -conforming load-, que la carga total. La referencia [7], presenta procedimientos para calcular los coeficientes de [B], [Bo] y Boo.

3.7 Factores de Penalización

De la solución de la función aumentada de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = 0; \quad \text{para todo } P_i^{min} \le P_i \le P_i^{max}$$

entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{dF_i}{dP_i} - \lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right) = 0$$

Re-ordenando la ecuación:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right)} \frac{dF_i}{dP_i} = \lambda$$

donde:

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_i}$$

se denomina pérdida marginal en la barra ***i***, y

$$Pf_i = \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right)}$$

se denomina factor de penalización de la barra ***i***.

Las pérdidas se incrementan si se incrementa la potencia en la barra i, por lo que el factor de penalización es mayor que uno. Esto significa, que cuanto más alejado se encuentra de la barra slack, se tiene mayores costos incrementales debido a las pérdidas del sistema.

Para resolver un problema de despacho económico, es necesario conocer las características de las unidades de generación.

3.8 Aplicaciones

Ejemplo 3.1

Resolución del problema 3.7, planteado en la referencia [1]. Asumiendo que las tres unidades térmicas descritas en la tabla 3-1, están en funcionamiento. Determinar el despacho de carga económico, para satisfacer una demanda de: a) 450 MW y b) 850 MW.

Tabla 3-I, Datos de los Generadores

Datos de la Unidad Gasto de calor	Potencia generada mínimo	Potencia generada máxima	Costo de combustible
$H_1 = 225 + 8.4P_1 + 0.0025P_1^2$	45	350	0.80
$H_2 = 729 + 6.3P_2 + 0.0081P_2^2$	45	350	1.02
$H_3 = 400 + 7.5P_3 + 0.0025P_3^2$	47.5	450	0.90

Los costos de suministros de cada unidad; $F_i = c_i H_i$, son:

$$F_1 = 180 + 6.72P_1 + 0.0020P_1^2$$
$$F_2 = 743.58 + 6.426P_2 + 0.00826P_2^2$$
$$F_3 = 360 + 6.75P_3 + 0.00225P_3^2$$

a) Empleando del método Iterativo Lambda, se tiene la siguiente solución:

Considerando un $\lambda_{inicial}$ = 8.0, para encontrar la solución se requiere 3 iteraciones, los resultados se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 3-II Resultados de las iteraciones

Iter	λ	P_1	P_2	P_3	P_T	Error P_T-P_R
1	8.0	320	95.2554	277.7778	693.0332	243.0332
2	7.2	120	46.8410	100	266.8410	-183.1590
3	7.5438	205.9513	67.6474	176.4012	450	0.0

El lambda de la 3ra iteración, se obtiene mediante la interpolación.

b) La resolución del problema, utilizando el software Eureka, presenta los siguientes reportes:

```
**************************************************************
Eureka: The Solver, Version 1.0
Thursday June 19, 2003, 9:22 pm.
Name of input file: D:\OPTIMI~1\EUREKA\EJEM31
**************************************************************

    ; Ejemplo  3.1: Problema 3.7, ref [1]

    PD = 450 ; Demanda
    F1 = (225 + 8.4*P1 + 0.0025*P1^2)*0.80; Costo de
    F2 = (729 + 6.3*P2 + 0.0081*P2^2)*1.02; Generación
    F3 = (400 + 7.5*P3 + 0.0025*P3^2)*0.9 ; por unidad
```

```
L1 = (8.4 + 0.005*P1)*0.80  ; Costos marginales: Lambdas
L2 = (6.3 + 0.0162*P2)*1.02 ; o Multiplicadores
L3 = (7.5 + 0.005*P3)*0.90  ; de Lagrange de cada unidad

F = F1 + F2 + F3

$min(F)

P1 + P2 + P3 = PD ;  Generación = Demanda

54   <= P1 <= 350 ; Limites de generación
45   <= P2 <= 350
47.5 <= P3 <= 450
```

****

Solution:

Variables		Values
F	=	4485.6381
F1	=	1648.8252
F2	=	1216.0904
F3	=	1620.7224
L1	=	7.5438055
L2	=	7.5438055
L3	=	7.5438055
P1	=	205.95138
P2	=	67.647390
P3	=	176.40123

****

Eureka: The Solver, Version 1.0 Page 2
Thursday June 19, 2003, 9:22 pm.
Name of input file: D:\OPTIMI~1\EUREKA\EJEM31

****

PD	=	450.00000

Confidence level = 96.1%
All constraints satisfied.

****

Cuando la carga sube a 850 MW. El reporte del software Eureka es el siguiente:

```
************************************************************
Eureka: The Solver, Version 1.0
Thursday June 19, 2003, 9:25 pm.
Name of input file: D:\OPTIMI~1\EUREKA\EJEM31
************************************************************

    ; Ejemplo  3.1: Problema 3.7, ref [1]

    PD = 850 ; Demanda
    F1 = (225 + 8.4*P1 + 0.0025*P1^2)*0.80; Costo de
    F2 = (729 + 6.3*P2 + 0.0081*P2^2)*1.02; Generacion
    F3 = (400 + 7.5*P3 + 0.0025*P3^2)*0.9 ; por unidad

    L1 = (8.4 + 0.005*P1)*0.80  ; Costos marginales: Lambdas
    L2 = (6.3 + 0.0162*P2)*1.02 ; o Multiplicadores
    L3 = (7.5 + 0.005*P3)*0.90  ; de Lagrange de cada unidad

    F = F1 + F2 + F3

    $min(F)

    P1 + P2 + P3 = PD ;  Generacion = Demanda
    54   <= P1 <= 350 ; Limites de generacion
    45   <= P2 <= 350
    47.5 <= P3 <= 450

************************************************************

Solution:

 Variables   Values

 F       =   7660.5107

 F1      =    2777.0000
 F2      =    1654.1953
 F3      =    3229.3153

 L1      =    8.1200000
 L2      =    8.4491118
 L3      =    8.4490436

 P1      =    350.00000
 P2      =    122.43475
 P3      =    377.56525

************************************************************
Eureka: The Solver, Version 1.0                Page 2
Thursday June 19, 2003, 9:25 pm.
Name of input file: D:\OPTIMI~1\EUREKA\EJEM31
```

```
************************************************************

 PD       =     850.00000

Confidence level =   96.0%
1 constraint not satisfied.

************************************************************
```

En el primer caso -carga de 450 MW-, los costos marginales -lambdas- son iguales. En el segundo caso -cuando la carga llega a 850 MW-, la unidad 1 trabaja a su máxima capacidad, su costo incremental es menor que de las restantes, es la unidad más económica.

Referencias Bibliográficas

[1] A. J. Wood, B. F. Wollenberg, **Power Generation Operation & Control**. Jhon Wiley & Sons, New York, 1983.

[2] A. Blanco, **Control de Emergencias y Desprendimiento Óptimo de Carga**. Tesis de Magister, PUCCh, Santiago de Chile, 1992.

[3] B.Stott, et al., 'Security Analysis and Optimization', **Proc. IEEE**, Vol. 75, No. 12, December 1987, pag. 1623-1644.

[4] R. M. Maliszewski, et al., 'Linear Programming as an Aid Planning Kilovar Requirements'. **IEEE Trans. PAS,** Vol. PAS-87, No 12, December 1968, pp. 1963-1968.

[5] N. Deeb, S. M. Shahidehpour, 'Linear Reactive Power Optimization in a Large Power Network Using the Decomposition Approach'. **IEEE Trans. PS**, Vol. 5, No. 2, May 1990, pag. 428-438.

[6] R. Aduviri, **Operación Económica de Sistemas Eléctricos de Potencia**. Proyecto de Grado, UTO, Oruro 1988.

[7] P. S. R. Murty, **Power System Operation and Control**. Mc Graw-Hill, New Delhi, 1984.

[8] **LINDO**, Manual del Usuario.

[9] **Eureka**, Manual del Usuario.

[10] F. Schweppe, et al., **Spot Pricing of Electricity**. Klumer Academic Publisher, Bostón, 1988.

[11] P. Almendras, **Modelo de Coordinación Hidrotérmica en Sistemas Eléctricos de Potencia**. Proyecto de Grado, UTO, Oruro 1996.

[12] H. A. Taha, **Investigación de Operaciones: Una Introducción**. Representaciones y servicios de ingeniería, México, 1981.

[13] K. Mathur, D. Solow, **Investigación de Operaciones**. Prentice Hall, México, 1996.

[14] H. Rudnick, **Aspectos Técnico Económicos de la Desregulación del Sector Eléctrico**. La Paz-Bolivia, Febrero 1995.

[15] L. L. Garver, 'Transmission Network Estimation Using Linear Programming'. **IEEE Trans. PAS**, Vol. PAS-89, NO. 7, September/October 1970, pp. 1688-1697.
[16] D. L. Wall, et al., 'An Optimization Model For Planning Radial Distribution Networks'. **IEEE Trans. PAS**, Vol. PAS-98, No.3, May/June 1979, pp.1061-1068.
[17] F. S. Hillier, G. J. Lieberman, **Introducción a la Investigación de Operaciones**. Mc Graw-Hill, México, 3ra.Edición, 1991.

ANEXOS

A.1 Ayuda y Comandos del LINDO (MS-DOS)

: help
THIS IS LINDO (LINEAR, INTERACTIVE, DISCRETE OPTIMIZER),
COPYRIGHT (C) 1998, 1999 LINDO SYSTEMS. LINDO IS LICENSED
MATERIAL WITH ALL RIGHTS RESERVED. COPYING EXCEPT AS
AUTHORIZED IN LICENSE AGREEMENT IS PROHIBITED.

LINDO SOLVES LINEAR, INTEGER, AND QUADRATIC PROGRAMS ENTERED
IN NATURAL FORM. THE FOLLOWING WOULD BE VALID INPUT:

```
MAX 2X + 3Y
ST
4X + 5Y < 9
7X + 6Y < 13
END
GO
```

TO LEARN THE AVAILABLE COMMANDS TYPE "COMMANDS". TO GET
HELP FOR A PARTICULAR COMMAND, TYPE "HELP name" WHERE "name"
IS THE COMMAND NAME. FOR MORE HELP ON ENTERING A
FORMULATION, TYPE "HELP MAX".

TO GET OUT OF A COMMAND WHICH IS PROMPTING FOR INPUT, TYPE
EITHER "END" OR SIMPLY A CARRIAGE RETURN. YOU WILL RETURN
TO COMMAND MODE. SEE SPECIFIC COMMANDS FOR THE EFFECT IF
ANY, ON PROCESSING DONE BY THAT COMMAND.

MAXIMUM SIZE OF INPUTS ARE:

INPUT	MAX. SIZE
NONZEROS	2000000
COLUMNS	300
ROWS	150
INTEGER VARIABLES	50
VAR/ROW NAME CHARACTERS	8

LARGER VERSIONS ARE AVAILABLE. PLEASE CONTACT:

LINDO SYSTEMS, INC.
P.O. BOX 148231
CHICAGO, IL 60614

EMAIL: INFO@LINDO.COM
TEL : 312-988-7422

: command

LINDO COMMANDS BY CATEGORY. FOR INFORMATION
ON A SPECIFIC COMMAND, TYPE "HELP" FOLLOWED

BY THE COMMAND NAME.

1) INFORMATION
HELP COM LOCAL CAT TIME DATE

2) INPUT
MAX MIN RETR RMPS TAKE LEAV RDBC FBR FINS

3) DISPLAY
PIC TABL LOOK NONZ SHOC SOLU RANGE BPIC CPRI
RPRI DMPS PPIC LKLG

4) FILE OUTPUT
SAVE DIVE RVRT SMPS SDBC FBS FPUN SMPN

5) SOLUTION
GO PIV GLEX

6) PROBLEM EDITING
ALT EXT DEL SUB APPC SLB FREE

7) QUIT
QUIT

8) INTEGER, QUADRATIC, AND PARAMETRIC PROGRAMS
INT QCP PARA POSD TITAN BIP GIN IPTOL

9) CONVERSATIONAL PARAMETERS
WIDTH TERS VERB BAT PAGE PAUS

10) USER SUPPLIED ROUTINES
USER

11) MISCELLANEOUS
INV STAT BUG DEB SET TITL NEWPW

A.2 Aplicación de la Rutina SOLVER de Microsoft EXCEL

Se muestra la planilla de datos y salidas para el ejemplo 2.2.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2		X1	X2	X3	X1A	X2A	X3A	X1B	X2B	X3B	X1C	X2C	X3C			
3		5150	0	0	1000	0	0	2850	0	0	1300	0	0		Valor	
4																
5	Max	10	8	6	-3	-3	-3	-2	-2	-2	-1	-1	-1	=	41500,0	
6	s.t.															
7	r1	-1			1			1			1			=	0,0	0,0
8	r2		-1			1			1			1		=	0,0	0,0
9	r3			-1			1			1			1	=	0,0	0,0
10	r4				0,5			-0,5			-0,5			<=	-1575,0	0,0
11	r5				-0,25			-0,25			0,75			=>	12,5	0,0
12	r6					0,85			-0,15			-0,15		<=	0,0	0,0
13	r7					-0,65			-0,65			0,35		=>	0,0	0,0
14	r8						0,95			-0,05			-0,05	<=	0,0	0,0
15	r9						-0,5			-0,5			0,5	=>	0,0	0,0
16	r10							1	1	1				<=	2850,0	2850,0
17	r11										1	1	1	<=	1300,0	1300,0
18	r12				3	3	3	2	2	2	1	1	1	<=	10000,0	10000,0

Microsoft Excel 9.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Libro21.xls]Hoja1
Informe creado: 30/06/03 4:00:54

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
$B$2	X1	5150	0	10	1E+30	2,00000036
$C$2	X2	0	0	7,999999798	2,00000034	1E+30
$D$2	X3	0	0	5,999999848	4,00000023	1E+30
$E$2	X1A	1000	0	-3	5	5,71428712
$F$2	X2A	0	-6	-3,000000288	5,71428689	1E+30
$G$2	X3A	0	-8	-3,000000288	8,00000068	1E+30
$H$2	X1B	2850	0	-2	1E+30	3,33333333
$I$2	X2B	0	-6	-1,999999949	5,71428668	1E+30
$J$2	X3B	0	-8	-1,999999949	8,00000046	1E+30
$K$2	X1C	1300	0	-1	1E+30	2,00000047
$L$2	X2C	0	0	-1,000000339	2,00000046	1E+30
$M$2	X3C	0	0	-1,000000339	4,00000041	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
$O$13	<= Valor	0,0	0,0	0	1E+30	0
$O$15	<= Valor	2850,0	3,3	2850	150	1890
$O$14						

Microsoft Excel 9.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [Libro21.xls]Hoja1
Informe creado: 30/06/03 4:00:54

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$O$4	#¿NOMBRE?	41500,0	41500,0

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$2	X1	5150	5150
$C$2	X2	0	0
$D$2	X3	0	0
$E$2	X1A	1000	1000
$F$2	X2A	0	0
$G$2	X3A	0	0
$H$2	X1B	2850	2850
$I$2	X2B	0	0
$J$2	X3B	0	0
$K$2	X1C	1300	1300
$L$2	X2C	0	0
$M$2	X3C	0	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$O$13	<= Valor	0,0	$O$13<=$P$13	Obligatorio	0
$O$15	<= Valor	2850,0	$O$15<=$P$15	Obligatorio	0
$O$14		0,0	$O$14>=$P$14	Obligatorio	0,0
$O$17	<= Valor	10000,0	$O$17<=$P$17	Obligatorio	0
$O$12		0,0	$O$12>=$P$12	Obligatorio	0,0
$O$10		12,5	$O$10>=$P$10	Opcional	12,5
$O$11	<= Valor	0,0	$O$11<=$P$11	Obligatorio	0
$O$16	<= Valor	1300,0	$O$16<=$P$16	Obligatorio	0
$O$9	<= Valor	-1575,0	$O$9<=$P$9	Opcional	1575
$O$8	#¿NOMBRE?	0,0	$O$8=$P$8	Opcional	0
$O$7	#¿NOMBRE?	0,0	$O$7=$P$7	Opcional	0
$O$6	#¿NOMBRE?	0,0	$O$6=$P$6	Opcional	0

A.3 Flujograma Método Iterativo Lambda

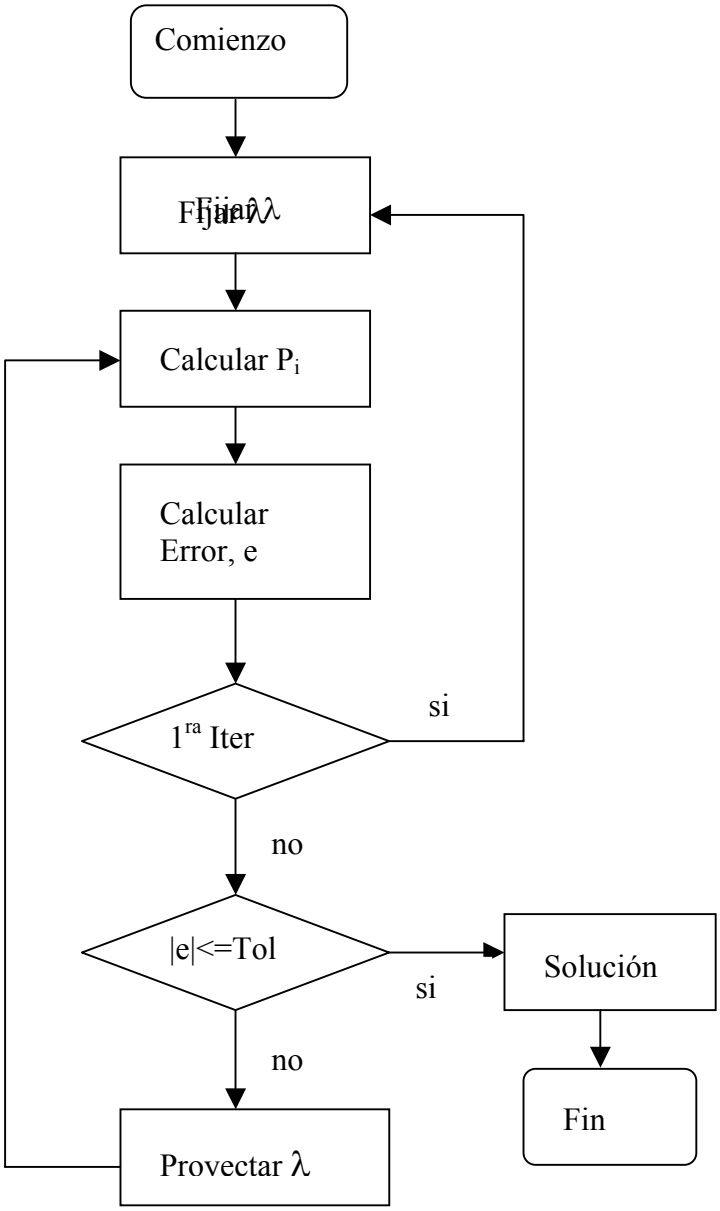


Fig. A.3 Diagrama de flujo, método iterativo proyección Lambda